GERAK SATU DIMENSI

Sugiyanto, Wahyu Hardyanto, Isa Akhlis

A. Gerak Jatuh Bebas Tanpa Hambatan

Sebuah benda dijatuhkan dari ketinggian tertentu dengan besar kecepatan awal v_0 . Apabila diasumsikan tidak ada gaya yang hambat laju benda saat jatuh, maka gaya yang bekerja pada benda tersebut hanyalah gaya berat akibat gravitasi bumi (W). Dengan demikian sesuai dengan Hukum II Newton, percepatan gerak benda pada waktu t adalah

$$\sum F = ma$$
$$-(mg) = ma$$
$$a = -g$$

Dari persamaan di atas, nyatalah bahwa percepatan benda hanya dipengaruhi oleh percepatan gravitasi bumi. Dengan konsep ini, maka kecepatan gerak benda yang dijatuhkan dari ketinggian tertentu akan semakin besar. Jika $\frac{dv}{dt} = a$, maka kecepatan gerak benda pada waktu t sebesar $v(t) = v_0 + at$ atau $v(t) = v_0 - gt$. Hal yang sama dapat diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = v$, maka posisi benda pada waktu t dapat dihitung dengan $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.

B. Gerak Jatuh Bebas dengan Hambatan

Analog dengan persoalan benda yang dijatuhkan dari ketinggian tertentu dengan kecepatan awal v_0 dan dengan memperhatikan gaya hambat fluida (*drag force*), maka gaya yang bekerja pada benda tersebut selain gaya berat juga gaya hambat udara itu sendiri (F_d) yang arahnya berlawanan arah dengan arah gerak benda.

Jika a adalah percepatan gerak benda jatuh, maka dari Gambar tampak bahwa sesuai dengan Hukum II Newton

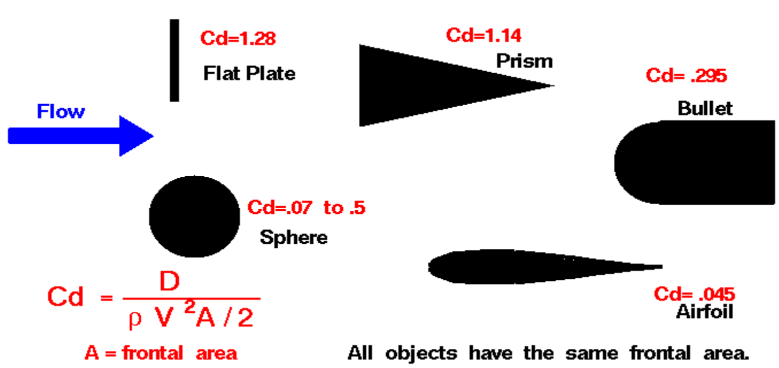
$$\sum F = ma$$
$$F_d - W = ma$$
$$F_d - mg = ma$$

Besarnya gaya hambat F_d bergantung pada bentuk benda, kecepatan benda, luas penampang melintang benda, dan kerapatan fluida dimana benda bergerak. Jika benda bergerak dengan kecepatan yang relatif besar (misalnya bilangan Reynolds yang tinggi, $\mathrm{Re}>1000$) maka besar gaya hambat fluida sebanding dengan kuadrat kecepatan benda tersebut atau biasa disebut dengan *quadratic drag*.

Besarnya gaya hambat fluida adalah

$F_d=\frac{1}{2}\rho v^2 C_d A$ dengan F_d adalah gaya hambat (N), ρ adalah kerapatan fluida (kg/m^3), v adalah kecepatan benda (ms^{-1}), C_d adalah koefisien hambatan (tak berdimensi), dan A adalah luas penampang melintang benda yang dijatuhkan (m^2).

Besarnya koefisien hambatan ditentukan oleh bentuk benda yang bergerak dalam fluida. Seperti terlihat dalam gambar di bawah tampak bahwa jika benda berupa plat bergerak ke kanan, maka benda tersebut akan memiliki koefisien hambatan sekitar 1,28. Sedangkan untuk benda berbentuk bola, maka nilai koefisien hambatan memiliki rentang antara 0,07 sampai dengan 0,5. Jika benda memiliki bentuk yang lain maka benda tersebut akan memiliki koefisien hambatan tertentu, seperti benda berbentuk prisma akan memiliki koefisien hambatan 1,14, kapsul dengan koefisien 0,295 dan lain-lain. Selain koefisien hambatan, gaya hambat juga dipengaruhi oleh jenis fluida dimana benda bergerak. Misalnya untuk kerapatan udara pada suhu 20 derajat celcius berkisar antara 1,204 kg m^{-3}, hidrogen cair 70 kg m^{-3}, 1000 kg m^{-3} untuk air pada suhu 25 ^{o}C, dan kerapatan 1261 kg m^{-3} untuk gliserol.



Besarnya percepatan benda yang bergerak dalam suatu fluida dan mengalami gaya hambat

F_d adalah

$$
\begin{aligned}
ma &= F_d - mg \\
a &= \frac{F_d}{m} - g \\
a &= \frac{\rho v^2 C_d A}{2m} - g \\
a &= \frac{Kv^2}{m} - g \,;\, dengan\, K = \frac{\rho C_d A}{2}
\end{aligned}
$$

Untuk mengetahui kecepatan benda pada waktu t (secara analitik) dapat ditentukan dengan cara melihat hubungan antara percepatan dengan kecepatan pada persamaan di atas. Jika diketahui $a = \frac{dv}{dt}$, maka $\frac{dv}{dt} = \frac{Kv^2}{m} - g$

$$\frac{dv}{\left(\frac{K}{m}v^2 - g\right)} = dt$$

dengan mengintegralkan persamaan di atas dan menggunakan konsep

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right)$$

maka

$$\int \frac{dv}{\left(\frac{K}{m}v^2 - g\right)} = \int dt$$

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{-4Kg}{m}}} \tan^{-1}\left(\frac{2\frac{Kv}{m}}{\sqrt{-4K\frac{g}{m}}}\right) = t$$ atau

$$t = \sqrt{\frac{-m}{Kg}} \tan^{-1}\left(v\sqrt{\frac{-K}{mg}}\right)$$

dengan demikian kecepatan benda pada saat t dapat dihitung dengan dengan menggunakan persamaan berikut.

$v(t) = -\sqrt{g\frac{m}{K}} \tanh\left(t\sqrt{K\frac{g}{m}}\right)$ Dengan tanda negatif (-) menunjukkan bahwa benda bergerak dengan arah ke bawah.

C. Kecepatan Terminal

Jika benda bergerak dalam sebuah fluida dan mengalami gaya hambat, maka kecepatan terminal dicapai saat gaya hambat sama dengan gaya yang mendorong benda tersebut atau saat percepatan benda sama dengan nol. Dari persamaan gerak benda di atas dapat diketahui bahwa kecepatan terminal benda adalah

$$v_{terminal}=\sqrt{\frac{2\mathrm{mg}}{C_d \rho A}}$$

D. solusi Numerik Persamaan Diferensial Biasa dengan Algoritma Euler

Solusi numerik dari sebuah persamaan diferensial dipakai untuk mengatasi kesulitan menemukan solusi analitik akibat kompleksnya persamaan matematis tersebut. Salah satu solusi numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB) adalah metode Euler. Metode Euler didasari oleh sebuah uraian deret Tylor. Jika f(x) adalah sebuah fungsi dengan x variabel peubah awal, maka berdasarkan uraian deret Tylor dapat dicari nilai dari fungsi tersebut pada (x+h) dengan h adalah sebuah selang tertentu dengan nilai yang cukup kecil.

$$f(x+h)=f(x)+f^{!}(x)h+\frac{f^{!!}(x)}{2!}h^2+\frac{f^{!!!}(x)}{3!}h^3+\ldots$$

Jika $f^{!}(x)=\frac{df}{dx}$, maka jika uraian deret Tylor tersebut diambil sampai suku ke-2, maka

$f(x+h)=f(x)+\frac{d f(x)}{dx}h+error$ maka $\frac{df}{dx}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Sebagai contoh, dalam mekanika newtonian seperti dalam kasus gerak benda dalam sebuah fluida, maka nilai besaran kecepatan pada suatu waktu dapat dicari dengan pendekatan metode Euler. Jika $\frac{dv}{dt}=a$, maka kecepatan pada saat $t+\delta t$ dapat dihitung jika percepatan pada saat t telah diketahui.

$\frac{dv}{dt}=a=\frac{v(t+\delta t)-v(t)}{\delta t}$ atau $v(t+\delta t)=v(t)+a(t)\delta t$

Jika persamaan ditulis dalam bentuk indeks maka

$v_{n+1}=v_n+a_n\delta t$ dimana $a_n=\frac{K v_n^2}{m}-g$.

E. Contoh Persoalan

Untuk memudahkan penerapan metode Euler dalam menyelesaikan persoalan persamaan diferensial biasa, dapat dikaji dari contoh persoalan benda jatuh sebagai berikut.

Sebuah bola dengan radius 7.5 mm dan massa 3.9 g dijatuhkan tanpa kecepatan awal dari sebuah ketinggian tertentu. Jika koefisien hambatan bola di udara adalah 0,46, kerapatan udara adalah 1,2 kgm^{-3}, dan percepatan gravitasi bumi 9,8 ms^{-2}, maka dengan menggunakan metode Euler:
(a) hitunglah kecepatan benda sebagai fungsi dari waktu (t) dari t=0 s sampai dengan.15 s. Gunakan perubahan selang waktu δt = 0.01 s. (b) Apakah kecepatan bola akan terus membesar? Jelaskan! (c) Bandingkan hasil perhitungan kecepatan bola dengan menggunakan metode Euler dan perhitungan secara analitik. Apakah terjadi perbedaan yang cukup signifikan?

F. Algoritma

Untuk dapat menyelesaikan persoalan di atas, maka diperlukan langkah-langkah penyelesaian yang logis dan tepat. Langkah-langkah ini disebut sebagai algoritma. Algoritma dibuat untuk digunakan sebagai panduan bagi programer dalam menyusun kode-kode perintah yang akan dijalankan oleh komputer. Algoritma tidak bergantung pada bahasa pemrograman, namun kode-kode perintah programlah yang harus disesuaikan dengan bahasa pemrograman yang digunakan.

Pada contoh persoalan benda jatuh di atas, benda berupa bola dengan radius tertentu. Dengan demikian penampang melintang *(cross section)* bola akan berupa sebuah lingkaran dengan besar $A=\pi r^2$. Berikut ini adalah algoritma penyelesaian persoalan penentuan kecepatan bola jatuh di udara dengan menggunakan metode Euler yang ditulis dengan model *pseudo code*.

Algoritma 1 Menentukan Kecepatan Bola Jatuh dalam Udara

STEP 1 Pilih nilai *h*
STEP 2 Pilih kondisi awal, *v*
STEP 3 Mulai *Loop*
STEP 4 Hitung *a*

$$a = \tfrac{1}{2} C\rho \frac{\pi . r^2}{m} v^2 - g$$

STEP 5 Cetak *t* dan *v*
STEP 6 *Update v:*

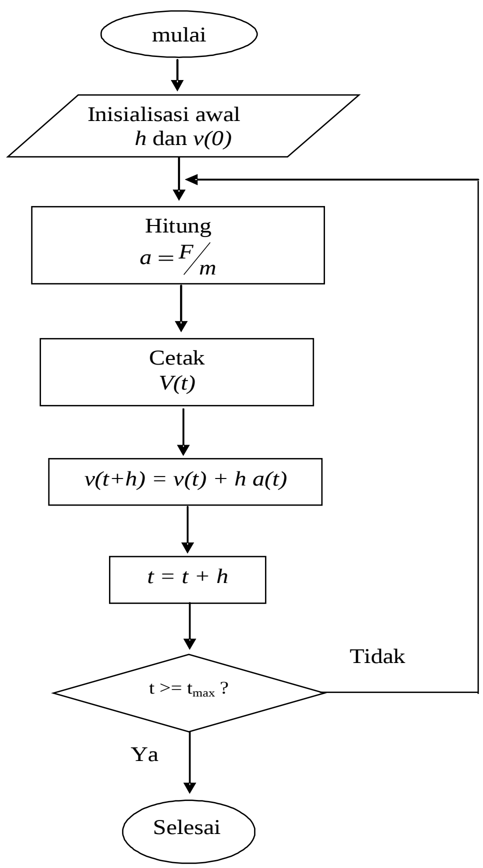
$$v \leftarrow v + h\, a$$

STEP 7 *Increment t*

$$t \leftarrow t + h$$

STEP 8 *Loop* hingga $t > t_{max}$
STEP 9 Selesai

Selain dengan menggunakan pseudo code, algoritma 1 juga dapat ditulis dengan menggunakan model diagram alir (flow chart) seperti berikut ini.



G. Contoh Kode Program

Berikut ini adalah implementasi dari algoritma 1 yang ditulis dengan menggunakan bahasa pemrograman PHP yang merupakan pemrograman berbasis web.

```
<?php
//initial condition
define('G',9.8);//membuat konstanta G
define('h',0.005);
$r=7.5e-3;
$m=3.9e-3;
$C=0.46;
$rho=1.2;
$v=0;
$v_anal=$v;

$K=0.5*$C*$rho*pi()*$r*$r;
$vter=sqrt(($m*G)/$K);
echo "kecepatan terminal ".$vter;
//hitung
echo "<h2> Tabel Perhitungan Nilai Kecepatan Gerak Bola
Jatuh dengan Hambatan";
echo "<table border='1'><tr><th>t (sekon)</th><th>a
(ms<sup>-2</sup>)</th><th>v (ms<sup>-1</sup>)</th><th>a
analitik (ms<sup>-2</sup>)</th><th>v analitik (ms<sup>-
1</sup>)</th><th>Error (relatif)</th></tr>";
for($t=0;$t<=18;$t=round($t+h,3)){
     $F = (0.5*$C*$rho*pi()*$r*$r*$v*$v)-($m*G);
     $a = $F/$m;

     $F_anal = (0.5*$C*$rho*pi()*$r*$r*$v_anal*$v_anal)-
($m*G);

     $a_anal = $F_anal/$m;
     $v_anal = -1*sqrt(G*$m/$K)*tanh($t*sqrt($K*G/$m));

     $selisih=abs(($v-$v_anal)/$v_anal);

     echo
"<tr><td>$t</td><td>".round($a,2)."</td><td>".round($v,2)."
</td><td>".round($a_anal,2)."</td><td>".round($v_anal,2)."<
/td><td>".$selisih."</td></tr>";

     $v += $a*h;
}
echo "</table>";
?>
```

H. Latihan

1. Buktikan bahwa secara analitik, kecepatan benda yang bergerak dalam suatu fluida dengan kecepatan awal 0 adalah $v(t) = -\sqrt{\frac{2gm}{\rho A C_d}} \tanh\left(t\sqrt{\frac{g\rho C_d A}{2m}}\right)$ (tanda negatif menunjukkan arah gerak ke bawah)
2. Pelajari efek dari hambatan udara terhadap benda yang bergerak vertikal ke atas dengan kecepatan awal tertentu. Bandingkan lintasannya dengan gerakan benda pada vakum.
3. Sebuah bola dijatuhkan dengan kecepatan awal nol sebagaimana contoh persoalan dia atas dan memenuhi parameter h=0,01 s, g=9,8 m/s^{-2}, C_d =0,46, r=0,01 m, m=0,01 kg. (a) Bandingkan hasil perhitungan kecepatan dengan menggunakan metode Euler dan perhitungan analitik. (b) Kapan terjadi kecepatan terminal? (c) Apakah besarnya kecepatan terminal hasil perhitungan numerik sesuai dengan $v_{terminal} = \sqrt{\frac{2mg}{C_d \rho A}}$? Jelaskan!.